

La notion d'enthalpie utilisable : application à l'énergétique atmosphérique.

Pascal Marquet

▶ **To cite this version:**

Pascal Marquet. La notion d'enthalpie utilisable : application à l'énergétique atmosphérique.. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1990, 310, pp.1387-1392. meteo-00572691

HAL Id: meteo-00572691

https://meteofrance.hal.science/meteo-00572691

Submitted on 23 Sep 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*
(Météorologie/*Meteorology*)

La notion d'enthalpie utilisable : application à l'énergétique atmosphérique

Pascal MARQUET

Résumé – On étudie certaines applications hydrodynamiques du concept thermodynamique d'enthalpie utilisable (une forme particulière de la théorie de l'exergie). On démontre l'existence d'un bilan énergétique local et on présente son interprétation physique. On définit le concept de variation potentielle d'entropie totale qui justifie l'extension de la théorie de l'exergie aux études atmosphériques. La forme intégrée du bilan énergétique appliquée à un domaine spatial ouvert s'avère être une généralisation des différents concepts d'énergie utilisable précédemment introduits en météorologie.

On the concept of available enthalpy: application to atmospheric energetics

Abstract – *Hydrodynamical applications of the thermodynamic concept of available enthalpy, which is a restricted form of the exergy theory, are presented. The existence of a local energy cycle is demonstrated. This local cycle is obtained in connection with a new concept, the potential change in total entropy, which allows such an extension of the exergy theory to atmospheric studies. This achieves a synthetic view of meteorological energetics, generalizing all previous available energy concepts.*

Abridged English Version – 1. The available enthalpy is defined in thermodynamics (*see* [6]) as the state function $A_h = H - T_0 S$ which is called extrinsic: a joint property of the fluid (enthalpy H and entropy S) flowing through a device in steady flow and of the outer medium which surrounds this device and acts as a heat reservoir at a constant temperature T_0 (*see* [1] to [5] and [11] to [13]). A_h is similar in form to the Gibbs function except for this outer temperature T_0. Changes in A_h between the entrance and the exit of the device is the maximum shaft work obtainable from this system, called the steady-flow exergy [11]. An available energy concept has also been introduced in meteorology ([7] to [10]). It refers to the fraction of internal and gravitational potential energies that could potentially be transformed into kinetic energy through isentropic processes. Lorenz and Pearce ([8] to [10]) used integration by parts together with infinite boundary conditions: it was thus impossible to derive the local definition of an energy cycle starting from such global studies.

2. Specifying the form (1) for the specific entropy (with the use of the arbitrary numerical constants T_r and P_r), the specific available enthalpy a_h is defined for an ideal gas by (3). It is then split into the two energy components a_T and a_P [(4) and (5)] which depend only on the temperature and the pressure, respectively. a_T is a positive quantity, and the integral of a_P from 0 to P_{00} is zero if $P_r = P_{00}/e$. The local energy cycle (6) is easily obtained using usual meteorological results and the thermodynamic energy equation (2). The value of T_r is chosen so that $1/T_r$ is the space-time average of $1/T$ [*see* (7)], according to the main results of [9] and [10]: a uniform heating rate must not generate available energy and the second term of G_h in (6) must vanish in global average for such a uniform heating rate. The sum of the four equations of (6) leads to a Bernoulli conservation law for a frictionless steady isentropic flow, where the anergy "$a_n(\theta)$" is the untransformable part of the energy "h" (*see* [11]). The usual Bernoulli's law for an ideal gas is simply obtained by putting this anergy term on the right side of the Bernoulli conservation law.

Note présentée par Paul GERMAIN.

0764-4450/90/03101387 $ 2.00 © Académie des Sciences

3. One calls $\Delta S^{\circ} = a_h/T_r$ the potential change in total entropy: a change in total entropy if a hypothetical system undergoes appropriate processes; this system consists of an imaginary thermostat at temperature T_r and of a unit mass of an ideal gas. When defined as such, a_h becomes an intrinsic local state function allowing local meteorological applications. This contradicts the opinion of Keenan [12] who said it is not relevant to apply exergy theory to atmospheric energetics since the outer medium cannot be defined. But it is in full agreement with Feidt's choice of a mere numerical value for T_0 (*see* [13]).

4. Hydrostatic energetics ([8] to [10]) in pressure coordinates [14] are displayed in (11), where a_T is the sum of the three components a_B, a_S and a_C [*see* (8)]. Surprisingly, a_B in (9) and a_S in (10) are found to be very close to the baroclinic and the static stability energy components of Pearce [10], respectively. Defining ln (P_r) as the space-time average of ln (P), the global integral of a_P (like the isobaric average of a_C) cancels out: thus a_P and a_C could not appear in [10]. The main differences are the conversion term C_{SK} ($\bar{\omega} = 0$ in [8] to [10]) and the new flux convergences of a_C and a_P in the energy equation of a_S in (11).

5. Conclusion. — The present study is a generalization of the global theories of Lorenz and Pearce ([8] to [10]) to an exact and local atmospheric energetics (6). The concept of exergy is introduced mathematically, and its hydrodynamical and meteorological properties are then demonstrated. As expected by Rant (*see* [11]) exergy seems to be a general state function: for this study the steady-flow and outer thermostat constraints are not relevant. A similar problem arose last century when the concept of enthalpy gradually got a wider sense than the old concept of "heat function".

---

1. Historique. — Gibbs, Maxwell, Tait et Kelvin ont défini au XIX^{e} siècle les bases du concept thermodynamique d'énergie utilisable : le travail utile maximal pouvant être fourni par une machine. Les travaux fondamentaux dus à Gouy [1], Stodola [2], Jouguet [3] et Darrieus [4] ont affiné les présentations physiques et mathématiques du problème. La théorie moderne de l'exergie est une généralisation de ce concept (*voir* Borel [5]). L'enthalpie utilisable $H - T_0 S$ diffère de l'enthalpie libre (de Gibbs) par la présence de la température T_0 du milieu extérieur entourant la machine, ce milieu se comportant par hypothèse comme un thermostat. C'est pour le cas particulier d'un fluide traversant en régime permanent une machine que le travail utile maximal est égal à la variation de l'enthalpie utilisable entre l'entrée et la sortie (*voir* Martinot-Lagarde [6]).

En météorologie, une notion portant également le nom d'énergie utilisable a été introduite par Margules [7] puis développée par Lorenz ([8] et [9]) : c'est par définition la partie des énergies interne et potentielle de pesanteur du fluide atmosphérique qui est virtuellement convertible en énergie cinétique au cours de processus isentropiques. Pearce [10] a cherché à donner à cette énergie utilisable une signification physique locale. Mais l'emploi d'intégrations par parties associées à des conditions aux limites globales (colonnes verticales infinies et extension horizontale à toute l'atmosphère) limite fondamentalement ces approches de Lorenz et de Pearce à des études énergétiques globales.

L'objet de cette Note est de démontrer l'analogie du comportement intégral de ces deux notions météorologique et thermodynamique d'énergie utilisable. Pour réaliser cette synthèse, on est amené à introduire un nouveau concept qui est lié à l'exergie et qui seul possède un sens physique local : la variation potentielle d'entropie totale.

2. Définitions. — Considérons un gaz parfait en évolution quasi statique (les conditions thermodynamiques sont définies en tout point). La temperature potentielle est $\theta = T\,(P_{00}/P)^{\varkappa}$, où $\varkappa = R/C_p$ et $P_{00} = 1\,000$ hPa. Définissons l'entropie spécifique $s(\theta)$ par

$$s(\theta) - s_r = C_p \ln(\theta/\theta_r), \tag{1}$$

où s_r est l'entropie spécifique de référence relative aux valeurs constantes P_r et T_r à déterminer, avec $\theta_r = T_r(P_{00}/P_r)^{\varkappa}$. La dérivée particulaire de $s(\theta)$ conduit, après application du deuxième principe de la thermodynamique, à l'équation

$$\frac{ds}{dt} = \frac{C_p}{\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\dot{q}}{T}, \tag{2}$$

où $\dot{q}$ est le taux de réchauffement massique dû à la conduction, au rayonnement, au changement de phase de l'eau (élément atmosphérique minoritaire) et aux pertes thermodynamiques dues aux irréversibilités internes.

Définissons l'enthalpie utilisable spécifique a_h par (3), elle est fonction de l'enthalpie spécifique $h = C_p T$, de $h_r = C_p T_r$, et de la quantité $s - s_r$ donnée par (1)

$$a_h = (h - h_r) - T_r\,(s - s_r) = a_T + a_P. \tag{3}$$

C'est la définition formelle de l'exergie physique (Haywood [11]). C'est ainsi la somme d'une composante a_T positive, ne dépendant que de la température, et d'une composante a_P, ne dépendant que de la pression, dont l'intégrale entre 0 et P_{00} est nulle si $P_r = P_{00}/e$ (≈ 368 hPa) :

$$a_T = C_p\,T_r\,\mathscr{F}(X), \qquad X = T/T_r - 1, \qquad \mathscr{F}(X) = X - \ln(1+X) \geqq 0, \tag{4}$$

$$a_P = R\,T_r \ln(P/P_r). \tag{5}$$

En grandeur spécifique, les énergies cinétique et potentielle de pesanteur sont respectivement $e_K = \mathbf{V}^2/2$ et $e_G = \Phi = gz$, où $\mathbf{V}$ est le vecteur vitesse tridimensionnel des particules fluides, z la coordonnée verticale, g l'accélération de la pesanteur (supposée constante pour $z < 100$ km) et Φ le géopotentiel. Les dérivées particulaires de e_G, e_K, a_T et a_P conduisent à l'écriture du cycle énergétique suivant

$$\begin{cases} \dfrac{da_P}{dt} = -C_{PT} \quad \text{où} \quad C_{PT} = -\dfrac{R}{P}T_r\dfrac{dP}{dt}, \\ \dfrac{da_T}{dt} = +C_{PT} - C_{hK} + G_h, \qquad C_{hK} = -\dfrac{1}{\rho}\mathbf{V}.\nabla(P), \\ \dfrac{de_K}{dt} = +C_{GK} + C_{hK} - D, \qquad C_{GK} = -gw, \qquad D = -\mathbf{V}.\mathbf{F}, \\ \dfrac{de_G}{dt} = -C_{GK}, \qquad G_h = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial t} + \left(1 - \dfrac{T_r}{T}\right)\dot{q}. \end{cases} \tag{6}$$

On appelle cycle énergétique un tel ensemble d'équations d'évolution qui sont reliées par des termes d'échange notés C et qui peuvent comprendre des termes de flux notés B (apparaissant dans la section 4) ainsi que des termes de génération notés G. ∇ est l'opérateur vectoriel tridimensionnel de dérivation, $w = dz/dt$ la vitesse verticale, D la dissipation de l'énergie cinétique (positive) et $\mathbf{F}$ la force de friction tridimensionnelle.

L'utilisation des dérivées particulaires assure à l'évidence un sens physique local aux termes de (6) : on obtient le bilan énergétique en suivant dans son mouvement une particule fluide donnée. Le deuxième terme de G_h est semblable au terme de génération introduit par Lorenz et Pearce : $G_a = (1 - T_m/T)\,\dot{q}$, mais il reçoit ici un sens local qu'il ne

possédait pas dans [9] (p. 101) ou dans [10]. Ces auteurs ont choisi T_m de manière à donner une génération d'énergie utilisable qui soit nulle en moyenne dans le cas d'un chauffage uniforme : $1/T_m$ devait être alors égal à chaque instant à la moyenne massique de $1/T$ (*voir* [10]). Pour que T_r soit uniforme et constant, il est ici défini par une moyenne spatio-temporelle sur le domaine atmosphétique $\mathscr{D}$ (de masse M) et sur un intervalle de temps donné $[t_1, t_2]$ (avec $\Delta t = t_2 - t_1$)

$$\frac{1}{T_r} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\Delta t} \iiint_{\mathscr{D}} \frac{1}{T} \frac{dm}{M} \quad \Rightarrow \quad T_r \approx 250 \text{ K}. \tag{7}$$

La somme des quatre équations du cycle (6) est nulle pour le cas particulier d'un fluide en mouvement permanent ($\partial P/\partial t = 0$), isentropique ($\dot{q} = 0$) et sans frottement ($D = 0$). La quantité $e_G + e_K + a_h$ est alors une constante du mouvement (elle varie pour chaque particule fluide). Si on écrit a_h sous la forme $a_h = C_p T - a_n(\theta)$ avec $a_n(\theta) = C_p T_r [1 + \ln(\theta/\theta_r)] = \text{Cte}$ pour un mouvement isentropique, on retrouve simplement la relation de Saint-Venant concernant l'enthalpie totale massique $e_G + e_K + h$. L'introduction de a_h revient en fait à spécifier une valeur différente de la constante du mouvement. Cette quantité « a_n » est appelée anergie dans la théorie de l'exergie (*voir* [11]) : c'est la partie inutilisable de l'énergie « h » (sous les hypothèses de Bernoulli).

3. Variation potentielle d'entropie totale. — On montre aisément que la quantité $\Delta S^\circ = a_h/T_r$ est la variation d'entropie totale d'un système constitué d'une parcelle fluide (masse unité d'un gaz parfait) et d'un thermostat à la température T_r, quand la parcelle subit les transformations suivantes : (i) passage de (T, P) à (T_r, P) à pression constante en entrant en contact avec le thermostat; (ii) passage de (T_r, P) à (T_r, P_r) en suivant une isotherme réversible. Par analogie avec la température potentielle θ (température d'une parcelle fluide ramenée adiabatiquement à la pression de référence P_{00}), ΔS°, qui résulte également de transformations thermodynamiques utilisant les états de référence T_r et P_r, peut être dénommée variation potentielle d'entropie totale.

Le gain conceptuel apporté par ΔS° réside dans l'abandon de la notion de « milieu extérieur agissant comme un thermostat » qui est étroitement associée à la définition thermodynamique de l'exergie. Keenan [12] avait cru pouvoir exclure *a priori* les études météorologiques du champ d'application de l'exergie du fait de l'impossibilité évidente à définir un tel thermostat pour l'atmosphère. Feidt [13] a déjà suggéré de prendre une moyenne spatio-temporelle ou encore une valeur caractéristique de la température (c'est le cas ici). Définie par l'expression $T_r \Delta S^\circ$, l'enthalpie utilisable devient maintenant une simple fonction d'état intrinsèque a_h (T, P).

4. Comportement intégral et hydrostatique. — Soit un domaine atmosphérique ouvert et limité à la fois verticalement et horizontalement, ce qui implique la prise en compte des flux aux frontières de ce domaine. On supposera l'approximation hydrostatique $\partial\Phi/\partial P = -1/\rho$ qui conduit à ne s'intéresser qu'à l'énergie cinétique spécifique du seul vent horizontal e_{K2} ([8] à [10]). Enfin, on se place dans le système de coordonnée verticale pression (Kasahara [14]). Ces diverses hypothèses permettent le calcul du bilan énergétique d'une couche isobare (l'étendue horizontale étant celle du domaine) ainsi qu'une comparaison aisée avec [8] à [10]. La moyenne isobare d'une quantité η sera notée $\bar{\eta}$ et l'écart à celle-ci η'. On vérifie alors que la composante énergétique a_T peut être décomposée

exactement en la somme des trois composantes a_B, a_S et a_C définies par

$$(8)\quad \begin{cases} a_B = C_p\, T_r\, \mathscr{F}\,(X_B), & X_B = (T-\bar{T})/\bar{T}, \\ a_S = C_p\, T_r\, \mathscr{F}\,(X_S), & X_S = (\bar{T}-T_r)/T_r, \\ a_C = C_p\, T_r\, X_B\, X_S. \end{cases}$$

La composante a_B dépend de l'existence de gradients de température sur une isobare donnée, c'est la composante barocline. La composante a_S dépend de la présence d'un profil vertical de $\bar{T}$ non constant ($\bar{T} \neq T_r$), c'est la composante de stabilité statique.

Le développment à l'ordre deux de $\mathscr{F}\,(X)$ donne : $\mathscr{F}\,(X) \approx X^2/2$. Les valeurs typiques de $|X_B|$ et de $|X_S|$ ne dépassent pas 0,2 dans l'atmosphère. Développées à l'ordre le plus bas en X_B et X_S, a_B et a_S se réduisent alors aux composantes barocline et de stabilité statique de Pearce [10], notées respectivement $\tilde{a}_B$ et $\tilde{a}_S$

$$(9)\quad a_B \approx C_p \left(\frac{T_r}{\bar{T}}\right)^2 \frac{(T-\bar{T})^2}{2\,T_r} \equiv \left(\frac{T_r}{\bar{T}}\right)^2 \tilde{a}_B,$$

$$(10)\quad a_S \approx C_p \frac{(\bar{T}-T_r)^2}{2\,T_r} \equiv \tilde{a}_S.$$

On a en effet typiquement $(T_r/\bar{T})^2 \approx 1$, ce qui achève le rapprochement entre a_B et $\tilde{a}_B$ dans (9). Les raisonnements suivis par Pearce ne pouvaient pas conduire à la détermination de a_C qui est de moyenne isobare nulle. Pearce [10] a en effet utilisé comme point de départ, à l'instar des autres études portant sur le concept d'énergie utilisable en météorologie, l'intégrale étendue à toute l'atmosphère des énergies interne et potentielle de pesanteur. On ne pouvait revenir ensuite à une vision « locale » qu'avec l'indétermination fondamentale de la somme de tout terme dont l'intégrale globale est nulle. Si ln (P_r) est la moyenne spatio-temporelle de ln (P) (et donc $P_r \approx P_{00}/e \approx 368$ hPa), l'intégrale verticale de a_P est également nulle [*voir* (5)] et a_P est également logiquement absente dans [10].

Le bilan énergétique hydrostatique et en moyenne isobare de e_{K2}, a_B et a_S s'écrit, en coordonnée pression, sous la forme générique

« tendance isobare = convergence de flux + conversions + sources ou puits »

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{e_{K2}}}{\partial t} = -\overline{B\,(e_{K2})} - \overline{B\,(e_G)} + C_{BK} + C_{SK} - D_2 \\ \dfrac{\partial \overline{a_B}}{\partial t} = -\overline{B\,(a_B)} - C_{BK} + C_{SB} + G_B \\ \dfrac{\partial \overline{a_S}}{\partial t} = -\overline{B\,(a_S)} - \overline{B\,(a_C)} - \overline{B\,(a_P)} - C_{SK} - C_{SB} + G_S \end{cases}$$

où les dérivations temporelles sont réalisées à pression constante et où on a posé

$$(12)\quad \begin{cases} C_{BK} = -\dfrac{R}{P}\overline{\omega' T'}, \quad C_{SK} = -\dfrac{R}{P}\bar{\omega}\bar{T}, \quad D_2 = -\overline{\mathbf{U}.\mathbf{F}}, \quad G_B = \dfrac{T_r}{\bar{T}}\overline{\left(1-\dfrac{\bar{T}}{T}\right)\dot{q}}, \\ C_{SB} = C_{BK}\left(\left(1-\dfrac{\bar{T}_r}{\bar{T}}\right) + \dfrac{C_p}{R}\,P\,\dfrac{T_r}{\bar{T}}\,\dfrac{\partial \ln(\bar{T})}{\partial P}\right), \quad G_S = \left(1-\dfrac{T_r}{\bar{T}}\right)\bar{\dot{q}}. \end{cases}$$

U est le vecteur vent horizontal, $\omega = dP/dt$ est la vitesse verticale en coordonnée pression, et la convergence de flux d'une quantité η entrant dans le domaine est par définition

$$(13)\quad -B\,(\eta) = -\nabla_p.(\eta\,\mathbf{U}) - \partial\,(\eta\omega)/\partial P.$$

On montre que dans (11) les termes C_{BK}, C_{SB}, D_2, G_B et G_S sont semblables ou proches de ceux définis dans [10], les approximations éventuelles pour le démontrer sont identiques à celles qui conduisent à (9) et (10). Le terme C_{SK} explique, avec C_{BK}, le maintien de la circulation atmosphérique malgré la dissipation D_2, par une conversion en provenance des réservoirs $\bar{a}_B$ ou $\bar{a}_S$, eux-même alimentés par des termes de génération provenant directement ou indirectement de l'éclairement solaire. Ce nouveau terme C_{SK} était absent de [8] et de [10], ces études utilisant l'hypothèse $\bar{\omega}=0$. Celle-ci n'est rigoureusement vraie que pour une surface isobare complète entourant le globe. Les deux convergences de flux de a_C et de a_P dans l'équation de $\bar{a}_S$ dans (11) sont également des termes nouveaux. La liaison avec la théorie de Lorenz [8] nécessite de nouvelles approximations qui ont déjà été explicitées dans [10].

5. Conclusion. — La présente étude est une extension des théories approchées de Lorenz et Pearce à une formulation locale et exacte des conversions d'énergie. Cette extension est basée sur la notion thermodynamique d'exergie qui réalise un mélange intime des deux premiers principes de la thermodynamique (un potentiel thermodynamique). L'introduction de ce concept d'enthalpie utilisable dans l'énergétique atmosphérique est ici purement mathématique et formelle, elle est cependant justifiée par les résultats exposés dans cette Note (synthèses et extensions des résultats antérieurs). L'exergie, comme l'a présenti Rant en lui donnant son nom (*voir* [11], p. 267), semble ainsi être d'une portée très générale. On reconnaît ici l'analogue du problème historique de l'interprétation de l'enthalpie (*voir* [5], p. 17) : oublier les hypothèses originelles trop restrictives (systèmes ouverts en régime permanent pour l'enthalpie, thermostat extérieur et travail maximal pour l'exergie), et postuler finalement le statut de simple fonction d'état thermodynamique dérivée.

Note remise le 5 janvier 1990, acceptée après révision le 28 mars 1990.

Références bibliographiques

[1] Gouy, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 108, 1889, p. 507-509.
[2] A. Stodola, *Zeitschrift V.D.I.*, 42, 1898, p. 1086-1091.
[3] E. Jouguet, *Rev. de Mécan.*, 20, 1907, p. 213-238.
[4] M. G. Darrieus, *Sci. Ind.*, 204, 1931, p. 122-126.
[5] L. Borel, *Thermodynamique et énergétique*, Presses Polytech. Romandes, Lausanne 1987.
[6] A. Martinot-Lagarde, *Thermique classique*, Dunod, Paris, 1971.
[7] M. Margules, *Smith. Misc. Coll.*, 51, 1910, p. 533-595.
[8] E. N. Lorenz, *Tellus*, 7, 1955, p. 157-167.
[9] E. N. Lorenz, *World Meteorological Organization*, 1967.
[10] R. P. Pearce, *Quat. J. Royal Met. Soc.*, 104, 1978, p. 737-755.
[11] R. W. Haywood, *Journal of Mech. Eng. Sci.*, 16, 1974, p. 258-267.
[12] J. H. Keenan, *Brit. J. App. Phys.*, 2, 1951, p. 183-192.
[13] M. Feidt, *Thermodynamique et optimisation énergétique*, Lavoisier, Paris, 1987.
[14] A. Kasahara, *Mon. Weath. Rev.*, 102, 1974, p. 509-522.

Laboratoire de Météorologie dynamique du C.N.R.S., route départementale 36, 91128 *Palaiseau Cedex*
et *Météorologie nationale*, 92106 *Boulogne-Billancourt Cedex.*